**Heinrich-Heine-Universität**
Jun.-Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Peter Arndt

**Sommersemester 2017**
24.5.2017

# Lineare Algebra I
# Blatt 6

---

## 1 | Ecce homo

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x^2$

(c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

(d) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x^2/y & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$

(e) $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[X]$, $r \mapsto r = rX^0$

(f) $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $A \mapsto X^2 \cdot A$

(g) $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $A \mapsto A(7)$

(h) $\mathbb{R}[X] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $A \mapsto (x \mapsto A(x))$

## 2 | Quersumme

(a) Die direkte Summe $f_1 \oplus f_2 \colon V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto (f_1(\mathbf{v}_1), f_2(\mathbf{v}_2))$ zweier $K$-linearer Abbildungen $f_1 \colon V_1 \to W_1$ und $f_2 \colon V_2 \to W_2$ ist wieder $K$-linear.

(b) Zu jeder Familie $K$-linearer Abbildungen $f_i \colon V \to W_i$ $(i \in I)$ gibt es genau eine $K$-lineare Abbildung $f \colon V \to \prod_{i \in I} W_i$ mit $\pi_j \circ f = f_j$ für jedes $j \in I$. (Hier ist $\pi_j \colon \prod_{i \in I} W_i \twoheadrightarrow W_j$ die kanonische Projektion.)

(c) Zu jeder Familie $K$-linearer Abbildungen $f_i \colon V_i \to W$ $(i \in I)$ gibt es genau eine $K$-lineare Abbildung $f \colon \bigoplus_{i \in I} V_i \to W$ mit $f \circ \iota_j = f_j$ für jedes $j \in I$. (Hier ist $\iota_j \colon V_j \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$ die kanonische Inklusion.)

## 3 | Zweikammersystem

Für Teilmengen $A_1$, $A_2$ einer Menge $M$ und Untervektorräume $U_1$, $U_2$ eines Vektorraums $V$ gilt:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad &\Rightarrow \quad A_1 \cup A_2 \cong A_1 \sqcup A_2 \\ U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\} \quad &\Rightarrow \quad U_1 + U_2 \cong U_1 \oplus U_2 \end{aligned}$$

Gelten die Folgerungen auch jeweils ohne die Annahme?

## 4 | Gefühlte Redundanz

Sind $V$ und $W$ Vektorräume über einem Körper $K$, so ist jede $K$-lineare Abbildung $V \to W$ insbesondere ein Gruppenhomomorphismus $(V, +) \to (W, +)$. Gibt es auch Beispiele für nicht-$K$-lineare Gruppenhomomorphismen $(V, +) \to (W, +)$? Gibt es solche Beispiele mit $K = \mathbb{F}_3$? Mit $K = \mathbb{Q}$? Mit $K = \mathbb{R}$? Mit $K = \mathbb{C}$?

*In dieser Aufgabe können Sie ohne Beweis verwenden, dass jeder Untervektorraum ein Komplement besitzt: zu jedem $K$-Untervektorraum $U$ eines $K$-Vektorraums $V$ existiert ein $K$-Untervektorraum $U'$ von $V$ mit $V = U + U'$ und $U \cap U' = \{\mathbf{0}\}$.*

---

Bitte versehen Sie jede Lösung mit Namen, Übungsgruppen- und **ID-Nummer** und werfen Sie sie bis zum 31.5.2017, 10:30 Uhr in den für die jeweilige Aufgabe vorgesehenen Briefkasten ein (Etage 25.22.00).